KÜLÖNLENYOMAT

Magyar Pszichológiai Szemle

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
PSZICHOLÓGIAI BIZOTTSÁGA
ÉS
A MAGYAR PSZICHOLÓGIAI
TÁRSASÁG FOLYÓIRATA

CSAPÓ BENŐ

A STRUKTÚRA ÉS A TARTALOM SZEREPÉNEK VIZSGÁLATA IZOMORF KOMBINATORIKAI FELADATOKBAN

1985 XLII. KÖTET 1. SZÁM

A STRUKTÚRA ÉS A TARTALOM SZEREPÉNEK VIZSGÁLATA IZOMORF KOMBINATORIKAI FELADATOKBAN

CSAPÓ BENŐ
JATE Pedagógiai Tanszék

A tanulmány a kombinatív műveletek rendszerét és fejlődési folyamatát vizsgáló hosszabb kutatási program részeként készült. A mérési anyagból kiemelt izomorf feladatok eredményeit elemezve keresi a választ arra a kérdésre, hogy a teljesítmények meghatározásában milyen szerepe van a feladat struktúrájának és milyen a konkrét tartalomnak. A felhasznált 19 feladat hat különböző, de egymással izomorf struktúrát testesít meg. Az elemzés szerint a teljesítmények abszolút értékének meghatározásában a feladat struktúrájának domináns szerepe van. Azonos struktúra mellett a teljesítmények a tartalom megváltoztatása során is közel állandónak bizonyulnak, a tartalom absztraktabbá válásával kismértékben csökkennek. A feladatstruktúra megváltoztatása viszont a teljesítmények jelentős változásához vezethet, az eredmények a feladatok struktúrájának izomorfiája mellett is jelentősen különböznek. A korrelációs együtthatók alapján végzett cluster-analízis elsődlegesen az azonos tartalmú feladatokat sorolta közös csoportba. E csoportokon belül viszont jó közelítéssel azt a kapcsolatrendszert kapjuk, amit a struktúrák között elméleti elemzéssel kimutattunk.

A JATE Pedagógiai Tanszékén 1976-ban kezdődött az a kutatási program, amely a műveleti képességek (Nagy, [8], 120—121. o.) struktúrájának és fejlődési folyamatának leírását tűzte ki célul. Az egyik vizsgált terület a *kombinatív képesség* (Csapó, [1], [2]). A méréshez kidolgozott tesztrendszer közel 150 kombinatorikai feladatot tartalmaz, és a kombinatív képességnek egy hipotetikus rendszerét reprezentálja. Az empirikus vizsgálatokat három korosztállyal (10, 14 és 17 évesek) végeztük, a legnagyobb a nyolcadik osztályos minta volt (600 fő). A mérési anyag az alapkérdések megválaszolásán túl speciális problémák mélyebb elemzésére is lehetőséget nyújt.

Eredményeink értékeléséhez szükség van annak tisztázására, hogy *egy feladat-struktúra megoldásában elért teljesítmények mennyiben invariánsak a feladat konkrét tartalmával szemben*, vagyis mennyiben befolyásolja az eredményeket az, hogy a struktúrát milyen konkrét tartalom testesíti meg. A kérdés vizsgálatának tágabb elméleti jelentősége is van. Egyrészt a struktúrák gondolkodásbeli szerepével, másrészt pedig tesztelméleti kérdésekkel kapcsolatos.

E tanulmányban a tizennégy éves korosztály anyagát felhasználva 19 izomorf struktúrájú feladat eredményein keresztül elemezzük a felvetett kérdéseket.

A probléma előzményei

A kombinatív műveletekkel és a pszichikus struktúrákkal kapcsolatos megfontolásokat egyaránt Piaget-ig vezethetjük vissza. Piaget koncepciója szerint a gondolkodás és a matematika alapvető struktúrái megegyeznek, és a formális gondolkodás kialakulását az jellemzi, hogy egybeszerveződik a három alapvető struktúra: a topológiai struktúra, a csoport és a háló [9]. Az elmélet involválja azt a feltételezést, hogy a kialakult műveleti struktúra különböző tartalmakon egyaránt működőképes. Ezért például logikai műveletek fejlődését fizikai kísérletek értelmezése során tett kijelentéseket elemezve vizsgálja, majd egy kombinatorikai jellegű feladat megoldásában külön is foglalkozik a 16 kétváltozós logikai műveletet egybefoglaló háló-struktúrával [5].

A Piaget nyomán kibontakozó sokirányú gondolkodáskutatás szinte minden irányzata központi kérdésként kezeli a struktúrák vizsgálatát. Különösen sok elemzés tárgya volt a csoport-struktúra. Dienes és munkatársa a csoportstruktúrán vizsgálják a struktúra-struktúra kölcsönhatást (transzfer) [3], Klein és munkatársai a tanulóképességet [6]. A háló-struktúrával már kevesebb kutató foglalkozik, és szinte egyáltalán nem elemezték azt a kombinatorikai struktúrát, amelynek kialakulása — Piaget szerint — a gondolkodásban meghatározó jelentőségű.

A struktúra szerepének hangsúlyozása mellett új oldalról közelíti meg a kérdést a kognitív pszichológia. Különböző vizsgálatok bizonyítják, hogy a feladatok struktúrájának kismértékű, még az izomorfia határain belül maradó megváltoztatása is nagymértékben befolyásolja a megoldás eredményességét (Simon—Hayes, [10], Hayes—Simon, [4] és Simon, [11]).

A struktúra problémája a tesztelméletben a kritérium-orientált (criterion-referenced) tesztek megjelenésével vetődik fel igen élesen. A pszichológiai tesztek többsége egészen a legutóbbi időkig a normativitás elvei szerint készült. A normatív tesztek alkalmazásának hátterében kidolgozott statisztikai elmélet áll (l. pl. [7]). Azonban, sajnos nem minden célra használhatók egyaránt eredményesen, pedagógiai alkalmazásuk pedig különösen problematikus. Ezért egyre szélesebb körben terjednek a kritérium-orientált tesztek. Itt a teljesítmény-értékeknek önmagukban (a normákra való vonatkoztatás nélkül) is jelentéssel kell bírniuk, ez pedig megköveteli, hogy a teszt-itemek jól reprezentálják a vizsgálandó pszichikus struktúrákat. Ez a validitás fogalmának újraértelmezését, illetve új validálási eljárások kidolgozását teszi szükségessé.

Matematikai háttér

Az elemzéshez felhasznált feladatok *hat különböző, de egymással izomorf* feladatstruktúrát testesítenek meg. A hat struktúra között matematikai szempontból különböző kapcsolatokat értelmezhetünk. Mivel egyik kérdésünk éppen az, hogy a struktúrák közötti matematikai összefüggések miképpen jelentkeznek a feladatok megoldásában, elsőként tekintsük át a hat feladatstruktúrát és a közöttük értelmezhető összefüggéseket.

Ismeretes, hogy egy 'n' elemű halmaz elemeiből képzett 'k' tagú és 'n—k' tagú, ismétlés nélküli kombinációk száma megegyezik.
Ezt a jól ismert

$$(1) \qquad \overset{\mathrm{I}}{\binom{n}{k}} = \overset{\mathrm{II}}{\binom{n}{n-k}}$$

egyenlőség fejezi ki. Így speciálisan öt elem kéttagú és háromtagú kombinációinak száma megegyezik (egyaránt 10), és közöttük kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesíthetünk: mindegyik részhalmazhoz hozzárendelhetjük a komplementerét. Belátható továbbá, hogy a kételemű kombinációk minden egyes felsorolásának megfeleltethetjük a háromelemű kombinációk egy felsorolását és megfordítva. Például az A, B, C, D, E elemekből képezett kételemű kombinációk.

(I) AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE

ábécé szerinti felsorolásának megfeleltethető a háromelemű kombinációk fordított betűrend szerinti felsorolása:

(II) EDC, EDB, ECB, DCB, ADE, ECA, DCA, EBA, DBA, CBA.

A két felsorolás izomorf matematikai értelemben (itt a műveletartás kritériuma helyett a relációtartást, esetünkben a rendezési reláció megmaradását vesszük), és belátható, hogy a két felsorolási feladat izomorf probléma Simon meghatározása értelmében: „Két probléma akkor számít izomorfnak, ha az egyik probléma megengedett lépései kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésbe hozhatók a másik probléma megengedett lépéseivel." (Simon, [11], 272. o.)
Ismeretes, hogy az 'n' elemű halmazból képezett 'k' elemű ismétléses kombinációk és az 'n' elemből képzett 'n+k—1' elemű, ismétlés nélküli kombinációk között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető.
Így esetünkben:

$$\overset{\mathrm{I}}{\binom{5}{2}} = \overset{\mathrm{II}}{\binom{5}{3}} = \overset{\mathrm{III}}{\binom{3+3-1}{3}} = \overset{\mathrm{IV}}{\binom{4+2-1}{2}}$$

Tehát az előző kettőhöz további két izomorf felsorolást találtunk, az ABC elemekből képezett háromtagú ismétléses kombinációkat:

(III) AAA, AAB, AAC, ABB, ABC, ACC, BBB, BBC, BCC, CCC

és az ABCD elemekből képezett kéttagú ismétléses kombinációkat:

(IV) AA, AB, AC, AD, BB, BC, BD, CC, CD, DD.

Az (1) egyenlőséget további alakokban is felírhatjuk:

$$\overset{\mathrm{I}}{\binom{n}{k}} = \overset{\mathrm{II}}{\binom{n}{n-k}} = \overset{\mathrm{V}}{\left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right)} = \overset{\mathrm{VI}}{\binom{n}{k,(n-k)}}$$

Az (V) képlet többek között kifejezi 'n' olyan elemismétléses permutációinak számát, melyek között 'k' illetve (n—k) számú azonos van. Így az előzőekkel izomorf felsorolás a következő:

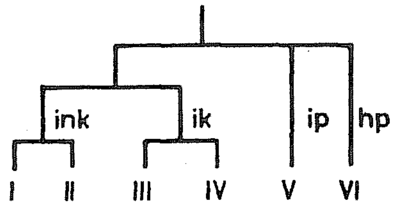
(V) AABBB, ABABB, ABBAB, ABBBA, BAABB,
BABAB, BABBA, BBAAB, BBABA, BBBAA

Ezt a felsorolást például származtathatjuk úgy az (I)-ből, hogy ahol a (I) az (A, B, C, D, E) rendezett halmaz 1. és 2. elemét tartalmazza, ott (V)-ben az 1. és 2. helyre teszünk A-t, a többi helyre B-t, ahol az (I)-ben az (A, B, C, D, E) 1. és 3. eleme szerepel, ott (V)-ben az 1. és a 3. helyre teszünk A-t stb. A (VI) formula a halmazok particiójának is szokásos jelölése, azt adja meg, hogy hányféleképpen lehet egy halmazt egy 'k' és egy 'n—k' elemű részhalmazra bontani. Az (A, B, C, D, E) halmaz 2/3 típusú particiói például:

(VI) AB/CDE, AC/BDE, AD/BCE, AE/BCD, BC/ADE, BD/ACE, BE/ACD, CD/ABE, CE/ABD, DE/ABC

Ránézésre látható, hogy a (VI) felsorolás az (I) és (II) felsorolás egyesítésével áll elő, és így azokkal nyilvánvalóan izomorf.

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy hat különböző, de egymással izomorf kombinatorikai felsorolást értelmeztünk, amelyek között különböző kapcsolatokat figyelhettünk meg. Az (I) és (II) egy nagyobb struktúra része, és egymás komplementer részhalmazait tartalmazzák, (III) és (IV) a belőlük származtatható ismétléses kombinációk felsorolása. (VI) az (I) és (II) egyesítése, mely úgy áll kapcsolatban az (V) felsorolással, hogy a (VI) kételemű halmazai (V)-ben az 'A', háromelemű halmazai pedig a 'B' betűk helyét jelölik ki. A felsorolás-típusok bemutatott kapcsolatait a 1. ábrán szemléltetett osztályozással foglalhatjuk össze.



ink: ismétlés nélküli kombinációk képzése
ik : ismétléses kombinációk képzése
ip : ismétléses permutációk képzése
hp: halmazok particióinak képzése

1. ábra

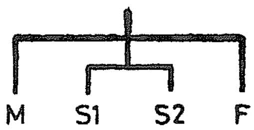
A feladatok

A kombinatív képesség vizsgálatához kidolgozott tesztrendszerben minden feladatstruktúrához három szinten, azaz *három különböző tartalommal* készítettünk feladatot: *manipulatív* (M), *szenzoros* (S) és *formális* (F) szinten. Manipulatív feladatoknál színes pálcikákból rakták ki a tanulók a megfelelő konstrukciókat, szenzoros szinten kis ábrákon jelölték be az összes lehetőséget, míg formális szinten betűkből kellett a megfelelő kombinációkat összeállítaniok (tehát formális szinten azokat a betűkből álló felsorolásokat vártuk el, amelyeket az előző részben bemutattunk).

A tesztek feladatrendszerében az (I)—(V) típusú felsoroláshoz mindhárom szint feladatai előfordulnak, sőt a tartalom hatásának részletesebb vizsgálata érdekében az (I), (II) és (V) típusú felsorolásokhoz szenzoros szinten még egy

„zajosabb” feladatot (S2) is készítettünk. A (VI) felsorolásnak megfelelő feladatok közül mindössze egy szerepel a rendszerben.

A szintek közötti kapcsolatot a 2. ábra szemlélteti.



2. ábra

A 19 feladatot szint és struktúra szerinti felosztásban az 1. táblázatban foglaltuk össze. (A feladatokra a továbbiakban a megfelelő kisbetűkkel fogunk hivatkozni.)

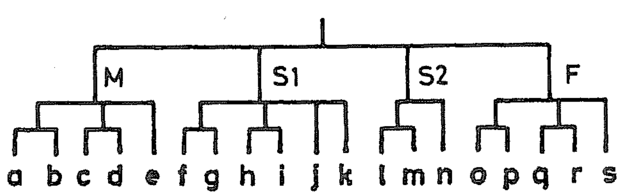
Mint korábban már jeleztük, az eredeti feladatrendszert a kombinatív képesség struktúrájának vizsgálatára dolgoztuk ki, így elsődleges szempontunk az elméleti úton kapott hipotetikus struktúra lefedése volt. Az így elkészült feladatokhoz csatlakoztak a további, speciális problémák elemzésére szolgáló feladatok, melyeknek számát azonban opitmális határok között kellett tartanunk, ezért a táblázat néhány rovata üres.

1. táblázat

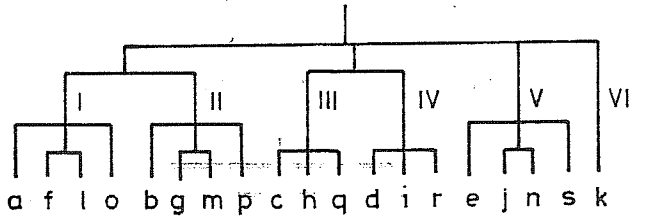
A feladatok struktúra és tartalom szerinti felosztásban

Szint (tartalom)		Struktúra					
		I	II	III	IV	V	VI
Manipulatív (M)		a	b	c	d	e	—
Szenzoros	(S1)	f	g	h	i	j	k
Szenzoros	(S2)	l	m	—	—	n	—
Formális		o	p	q	r	s	—

A táblázat az osztályozás szempontjai között nem fejez ki hierarchikus viszonyt, így abból az 1. és a 2. ábrán bemutatott osztályzások egymásutáni alkalmazásával lényegében kétféle hierarchiát készíthetünk. Ha a feladatok közös szint alapján tartoznak szorosabban össze, akkor a 3. ábrán látható osztályozást kapjuk, ha pedig az azonos struktúra létesít szorosabb kapcsolatot, akkor a 4. ábra szerinti osztályozás adódik.



3. ábra



4. ábra

Manipulatív szinten vizsgálatunkhoz színes számolópálcikákat használtunk. A feladatokhoz tartozó instrukciókat a vizsgált személyek írásban kapták meg, a szöveg mellett az elkészítendő összeállítás rajza is szerepelt (egymás mellé helyezett 2, 3 vagy 5 pálcika rajza). A tanulók önállóan dolgoztak, majd munkájukat befejezve jelentkeztek. Ezután a vizsgálatvezető adatgyűjtőn rögzítette a vizsgált személyek munkáját.

Az öt manipulatív feladat szövege:

a) Rakd ki az *összes lehetséges különböző, KÉT PÁLCIKÁBÓL ÁLLÓ összeállítást*, ha egy összeállításnak *csupa különböző színű pálcikából* kell állnia, és *a pálcikák sorrendje nem számít!*
Felhasználható pálcikák: PIROS, KÉK, SÁRGA, ZÖLD, FEKETE.

b) Rakd ki az *összes lehetséges különböző, HÁROM PÁLCIKÁBÓL ÁLLÓ összeállítást*, ha egy összeállításnak *csupa különböző színű pálcikából* kell állnia, és *a pálcikák sorrendje nem számít!*
Felhasználható pálcikák: PIROS, KÉK, SÁRGA, ZÖLD, FEKETE.

c) Rakd ki az *összes lehetséges különböző, HÁROM PÁLCIKÁBÓL ÁLLÓ összeállítást*, ha egy összeállításban *azonos színű pálcikák* is lehetnek, és *a pálcikák sorrendje nem számít!*
Felhasználható pálcikák: PIROS, KÉK, SÁRGA.

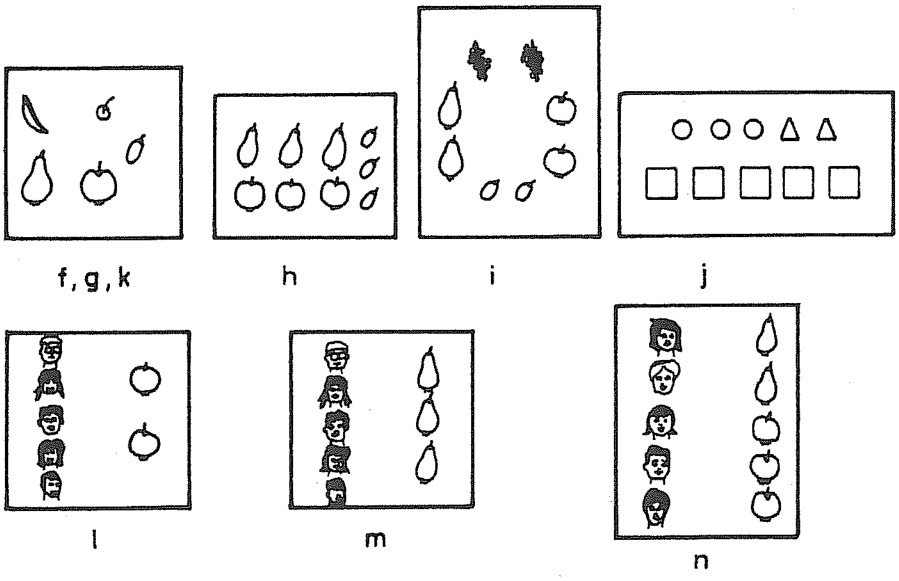
d) Rakd ki az *összes lehetséges különböző, KÉT PÁLCIKÁBÓL ÁLLÓ összeállítást*, ha egy összeállításban *azonos színű pálcikák* is lehetnek, és *a pálcikák sorrendje nem számít!*
Felhasználható pálcikák: PIROS, KÉK, SÁRGA, ZÖLD.

e) Rakd ki az *összes olyan különböző, ÖT PÁLCIKÁBÓL ÁLLÓ sorozatot*, amelyben *két PIROS és három KÉK pálcika* van ! Itt természetesen *számít a sorrend* is.

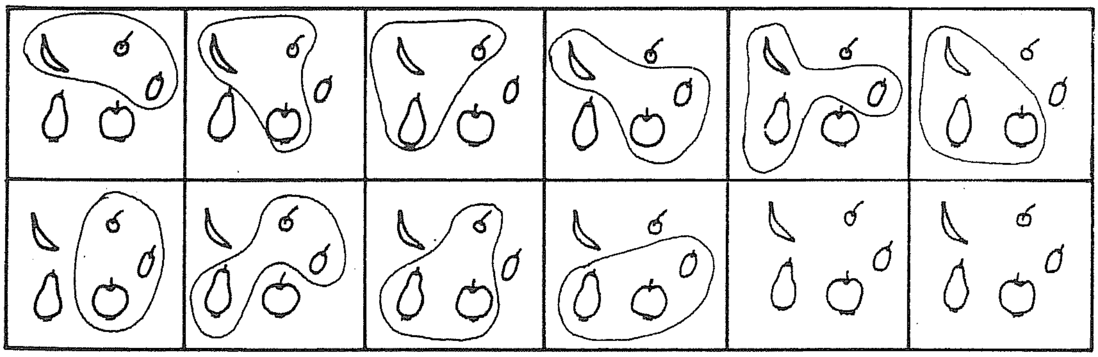
Szenzoros szinten minden feladathoz 12 kis, egyforma rajzból álló ábra tartozik, a vizsgált személyek ezeken jelölik be a feltételeket kielégítő összes lehetőséget. Azért használtunk a különböző lehetőségek számánál több rajzot, hogy ezek száma ne adjon támpontot a felsorolás teljességét illetően. Terjedelmük miatt a szenzoros feladatokat nem közöljük teljes részletességgel. Erre azonban lényegében nincs is szükség, mivel a feladatok megfogalmazásában sok a hasonló elem. A feladat szövege — akárcsak a manipulatív szinten — a lényeg leírására szorítkozott, kiemelve a feladat legfontosabb, illetve változó elemeit.

A feladatokhoz használt rajzokat az 5. ábrán foglaltuk össze. Minden feladathoz tehát 12 ilyen kis ábra tartozik, ahogy azt a 'g' feladat példáján a 6. ábra szemlélteti.

Az 'f', 'g' és 'k' feladatokhoz egyforma rajzot használtunk. Az 'f' feladat 2, a 'g' három gyümölcs bekarikázását kéri, míg a 'k'-ban úgy kell az ábrát két

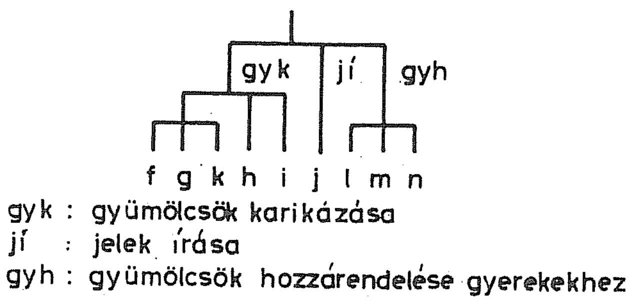


5. *ábra*



6. *ábra*

részre osztani, hogy az egyik részbe 2, a másikba 3 gyümölcs essen. A 'h' feladatban 3, az 'i'-ben 2 gyümölcsöt kell bekarikázni, az 'l', 'm', és 'n' feladatokban pedig a gyümölcsöket kell a gyerekek között kiosztani, és a kiosztást kis vonalakkal jelölni. A 'j' feladatban a felső sorban levő jeleket kell beírni a négyzetbe az összes lehetséges különböző sorrendben. A rajzok és tevékenységek szerint szenzoros szinten újabb osztályozási lehetőség adódik (7. ábra).



7. *ábra*

Formális szinten betűkből kell összeállításokat készíteni. Az instrukció a feladat szabatos megadására szorítkozik, a megoldást nem segíti ábra vagy szemléletes tartalom.

A formális feladatok szövege:

o) Készítsd el az *összes lehetséges különböző KÉT BETŰBŐL ÁLLÓ* összeállítást, ha *az A, a B, a C, a D és az E betűket* használhatod fel, és *ugyanaz a betű egy összeállításban csak egyszer szerepelhet! A betűk sorrendje nem számít!*

p) Készítsd el az *összes lehetséges különböző, HÁROM BETŰBŐL ÁLLÓ* összeállítást, ha *az A, a B, a C, a D és az E betűket* használhatod fel, és *ugyanaz a betű egy összeállításban csak egyszer szerepelhet! A betűk sorrendje nem számít!*

q) Készítsd el az *összes lehetséges különböző, HÁROM BETŰBŐL ÁLLÓ* összeállítást, ha *az A, a B, és a C betűket* használhatod fel, és *ugyanaz a betű egy összeállításban többször is szerepelhet! A betűk sorrendje nem számít!*

r) Készítsd el *az összes lehetséges különböző, KÉT BETŰBŐL ÁLLÓ* összeállítást, ha *az A, a B, a C és a D betűket* használhatod fel, és *ugyanaz a betű egy összeállításban többször is szerepelhet! A betűk sorrendje nem számít!*

s) Állítsd elő *az összes olyan különböző, ÖT BETŰBŐL ÁLLÓ sorozatot,* amelyben *két A és három B betű* szerepel! *Számít a betűk sorrendje* is!

A feladatok osztályozási lehetőségeinek felvázolásával lényegében hipotéziseket is megfogalmaztunk, ami a feladatok cluster-analízisének értelmezésében segíthet. Természetesen a bemutatott osztályozási szempontok bonyolult interferenciája is felléphet. Lehet, hogy az osztályok itt figyelembe nem vett szempontok szerint képződnek, de előfordulhat az is, hogy semmilyen szempont nem dominál és értelmezhetetlen, kaotikus csoportosulásokat kapunk.

A mérés és az eredmények

A vizsgálatot Csongrád megyében végeztük 600 tanulóval, akiket a reprezentativitás követelményei szerint választottunk ki a nyolcadik osztályosok közül. A tanulók a teszteket külön e célra szervezett foglalkozásokon pedagógusok felügyelete mellett oldották meg.

Az adatok feldolgozása során első lépésként, egyetlen mennyiségi mutatóval jellemeztük a feladatok megoldásának jóságát. E változót (J) úgy definiáltuk, hogy 0 és 1 közötti értéket vegyen fel; az elkészített jó és szükséges kombinációk függvényében monoton növekedjen; a jó, de a feladat feltételei szerint azonosnak számító (pl. AB = BA, mivel a kiválasztás sorrendje nem számít), ismétlődő és ezért felesleges kombinációk számának növekedésével csökkenjen. E feltételeknek felel meg a

$$J = \frac{x(T-y)}{T^2}$$

formula, ahol 'x'a jó és szükséges kombinációk számát, 'y' a jó de felesleges (ismétlődő) kombinációk számát, 'T' pedig a teljes megoldáshoz tartozó különböző kombinációk számát jelöli. ($T = x_{max}$, az itt elemzett feladatoknál T = 10.) 'J' értéke akkor 1, ha a tanuló az összes kombinációt felsorolja, és egyet sem ír fel kétszer. 'J' értékét 'T'-vel (esetünkben 10-zel) megszorozva a szubtesztek, tesztek eredményeinek számításához felhasználható számot kapunk, valamint 'T × J' az 'x' értékével közvetlenül is összehasonlítható.

A feladatok megoldásának statisztikai jellemzőit a 2. táblázatban mutatjuk be. A táblázat tartalmazza a jó kombinációk számának átlagát ($\bar{x}$) és szórását (s_x), az ismétlődő (felesleges) kombinációk számának átlagát ($\bar{y}$) és szórását (s_y), a megoldás jóságának jellemzésére szolgáló mutató átlagának tízszeresét ($10\,\bar{J}$) és szórását (s_J), valamint a hibátlan megoldások ($J = 1$) relatív gyakoriságát %-ban.

2. táblázat

A teljesítmények jellemzői

Feladat			Jó kombinációk		Ismétlődő kombinációk		A megoldás jóságának		Hibátlan megoldások aránya $J = 1$ %
szint (tartalom)	mat. struktúra	jele	átlaga $\bar{x}$	szórása s_x	átlaga $\bar{y}$	szórása s_y	10-szeres átlaga $10\bar{J}$	szórása s_J	
M	I	a	8,20	2,05	1,13	1,44	7,26	2,90	37,9
	II	b	6,50	2,28	1,67	1,55	5,29	2,83	10,7
	III	c	7,09	2,51	1,66	1,50	5,88	2,90	12,3
	IV	d	8,47	1,75	1,37	1,46	7,21	2,73	34,1
	V	e	6,96	2,51	0,19	0,50	6,81	2,51	14,8
S1	I	f	8,43	2,19	0,61	0,97	7,91	2,47	35,4
	II	g	6,73	2,49	0,78	1,08	6,17	2,62	6,8
	III	h	7,53	2,54	1,22	1,33	6,50	2,75	11,7
	IV	i	8,36	2,21	1,28	1,32	7,24	2,66	24,5
	V	j	6,27	3,07	0,50	0,93	5,92	3,07	13,8
	VI	k	5,20	1,92	1,02	1,24	4,55	1,90	2,4
S2	I	l	6,03	3,56	1,11	1,34	5,13	3,49	17,8
	II	m	4,83	3,19	1,17	1,36	3,99	2,99	4,9
	V	n	4,16	2,58	1,52	1,52	3,13	2,22	1,5
F	I	o	7,97	3,11	2,13	2,22	5,01	3,61	25,0
	II	p	5,80	3,07	2,15	2,13	3,60	2,88	6,0
	III	q	6,19	3,63	2,16	1,71	4,27	3,28	7,8
	IV	r	7,76	3,22	1,73	1,75	5,69	3,28	22,9
	V	s	5,61	2,86	0,02	0,19	5,59	2,87	8,4

A feladatok között a 'J' értéke alapján számított korrelációs együtthatókat a 3. táblázat tartalmazza. (Helykímélés érdekében a 0-t és a tizedesvesszőt elhagytuk.) Mivel a korrelációs együttható kiszámításához felhasznált feladatpárok száma minden esetben meghaladta az 500-at, a táblázatban szereplő legkisebb értékek ($r_{ai} = 0{,}12$ és $r_{bk} = 0{,}12$) is szigfininánsak 99%-os megbizhatósági szinten.

Az eredmények elemzése

Az eredményeket kétféle szempontból érdemes szemügyre venni:

1. Az egyes feladatok megoldásában nyújtott teljesítményeket a lehetséges maximumhoz viszonyítani, illetve egymással összehasonlítani; a feladatokat a teljesítmények jellemzői szerint csoportosítani, és így mintegy a feladatok „külső" kapcsolatrendszerét feltárni;

3. táblázat

A feladatok közötti korrelációs együtthatók

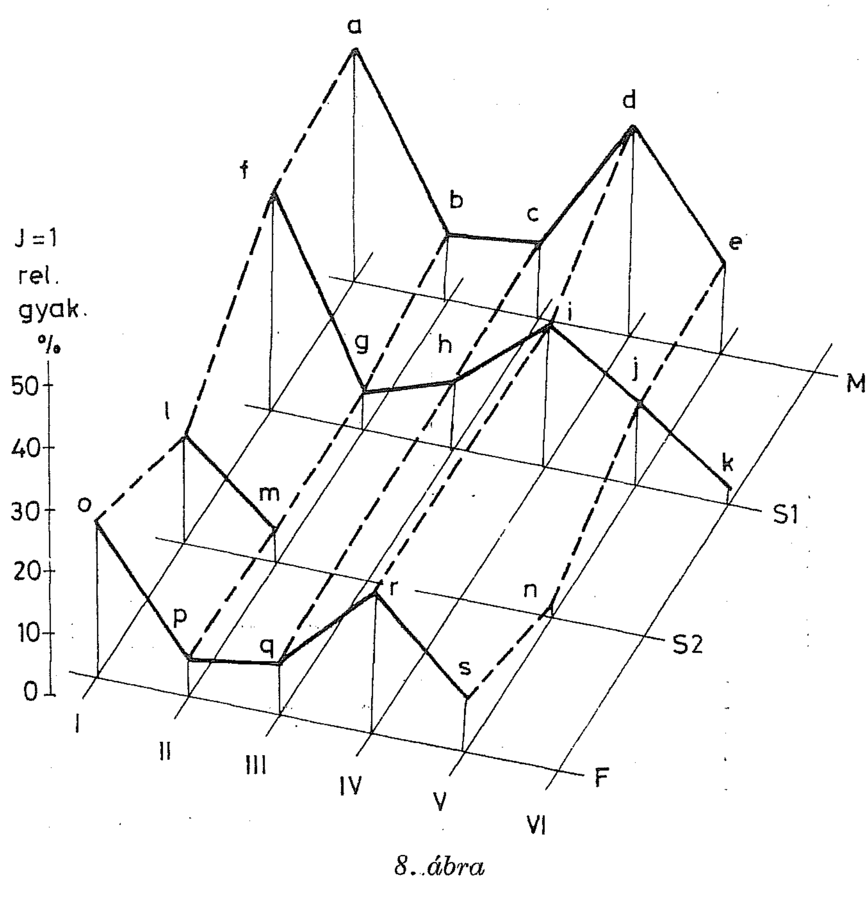
	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s
a	65	45	47	35	$\boxed{30}$	32	14	12	26	17	$\boxed{30}$	25	24	$\boxed{31}$	34	21	22	29
b		39	35	41	23	$\boxed{56}$	15	13	23	12	23	$\boxed{24}$	19	29	$\boxed{34}$	20	18	28
c			70	23	29	35	$\boxed{19}$	19	27	20	28	30	25	37	35	$\boxed{29}$	34	36
d				24	27	33	16	$\boxed{16}$	27	20	34	32	24	36	31	29	$\boxed{32}$	33
e					26	27	22	15	$\boxed{30}$	17	22	15	$\boxed{15}$	21	24	17	23	$\boxed{26}$
f						69	35	42	57	43	$\boxed{40}$	35	27	$\boxed{32}$	35	27	38	46
g							34	38	56	45	43	$\boxed{40}$	31	31	$\boxed{38}$	29	37	51
h								70	33	30	28	26	24	15	18	$\boxed{22}$	32	33
i									33	29	27	27	20	17	18	22	$\boxed{33}$	32
j										41	41	42	$\boxed{31}$	33	40	29	35	$\boxed{51}$
k											35	36	23	20	23	18	26	39
l												77	48	$\boxed{32}$	31	31	38	37
m													50	29	$\boxed{30}$	24	33	33
n														25	22	26	28	$\boxed{31}$
o															71	38	44	34
p																40	40	40
q																	67	31
r																		36

2. A feladatok „belső'' összefüggéseit megvizsgálni, azt a kapcsolatrendszert, amelyet a tanulók gondolkodásmódja közvetlenül létesít a feladatok között.

A 2. táblázat eredményeit áttekintve szembetűnő, hogy az egyes feladatok megoldásában nyújtott teljesítmények között — bármely mutatót tekintjük is — *jelentős különbségek* vannak. Ami az adatok abszolút nagyságát illeti, a hibátlan megoldást nyújtó tanulók aránya a legjobb esetben is csak 37,9% (az 'a' jelű feladatoknál), egyébként a jó kombinációk átlagos számát ($\bar{x}$) vagy a megoldás jóságát ($\bar{J}$) tekintve néhány feladat átlaga eléri vagy némileg meghaladja a 80%-ot. A különbségek a jó konstrukciók számának átlagában ($\bar{x}$) is jelentkeznek, ahol a legnagyobb érték 8,47 ('d' feladat, kéttagú ismétléses kombinációk képzése), a legkisebb 4,16 ('n' feladat, ismétléses permutációk képzése). Nagy eltérések mutatkoznak a feleslegesen felírt kombinációk átlagos számában ($\bar{y}$) és a feladat jóságát kifejező mutatók átlagában ($\bar{J}$) is. A legélesebben azonban a hibátlan megoldások relatív gyakoriságában jelentkeznek.

A táblázatból az is látszik, hogy bár az egyes szinteken belül az adatok között nagy különbségek vannak, *értékeik a különböző szinteken hasonló tendencia szerint változnak*. Ezt a megfigyelést az adatok háromdimenziós skálán való ábrázolásával tehetjük szemléletessé.

A 8. ábrán a jó megoldások relatív gyakoriságát ábrázoltuk a struktúra és a szint (tartalom) szerinti bontásban. Látható, hogy *egy szinten belül* (kihúzott

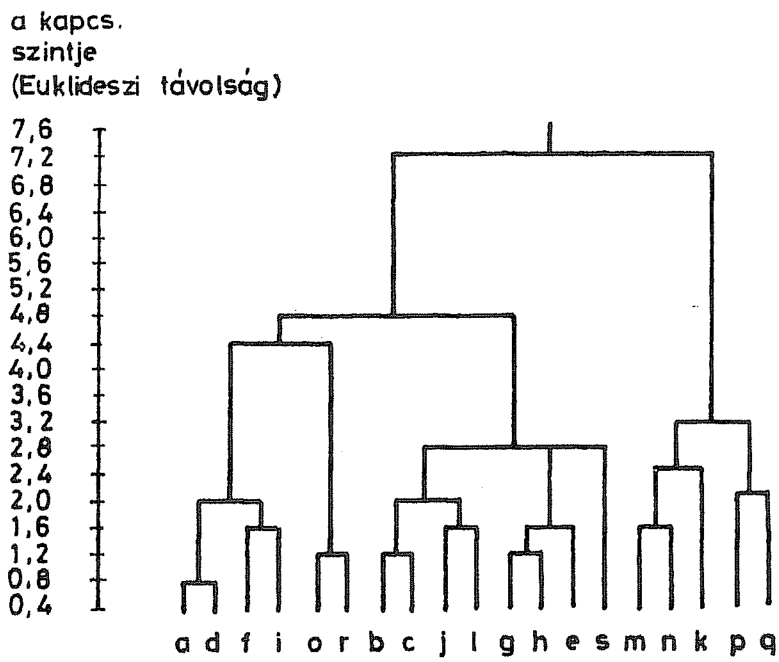


8. ábra

vastag vonal) *a különböző struktúrák között nagyobbak a különbségek, mint az azonos struktúrák* (szaggatott vonal) *különböző tartalmakban megjelenő feladatai között.*

Ez az eredmény a kritérium-orientált tesztek alkalmazása szempontjából rendkívül kedvező tendenciát sejtet. Ha ugyanis azt kívánjuk vizsgálni, hogy adott pszichikus struktúra a populációban milyen mértékben fejlődött ki, akkor bizonyos határok között invariáns, hogy milyen tartalmú feladatokat használunk. Azonos struktúrájú feladataink megoldásában például alig jelent különbséget, hogy a feladatot manipulatív, szenzoros vagy formális tartalomba ágyaztuk. Természetesen egy bonyolult tevékenységet igénylő, sok ,,zajjal'' terhelt feladatnál leesnek a teljesítmény-értékek — ezt jól tükrözik az S2 szint feladatai. Ugyanakkor a struktúra kismértékű, még az izomorfia határain belül maradó megváltoztatása is jelentős különbségeket eredményez a feladatok megoldásában.

A 9. ábráról látható, hogy az (I) és a (IV) típusú struktúrák teljesítményei igen közel állnak egymáshoz, a (II) és (III) típusú struktúrák eredményei is hasonlítanak egymásra. Kérdés, hogy az eredmények hasonlósága a 2. táblázatban feltüntetett többi adatra is érvényes-e, és ha igen, akkor mivel magyarázható. A kérdés megoldása érdekében tekintsük a feladatra jellemző adatokat egy hétdimenziós vektor komponenseinek, és az így értelmezett vektorok között számítsuk ki az euklideszi távolságokat. (Hogy azonos nagyságrenden belül maradjunk, a relatív gyakoriságok adatait tízzel osztjuk.) Az így kapott távolság-mátrix alapján végzett cluster-analízis eredményeként előálló dendrogramot a 9. ábra szemlélteti (complete linkage).



9. ábra

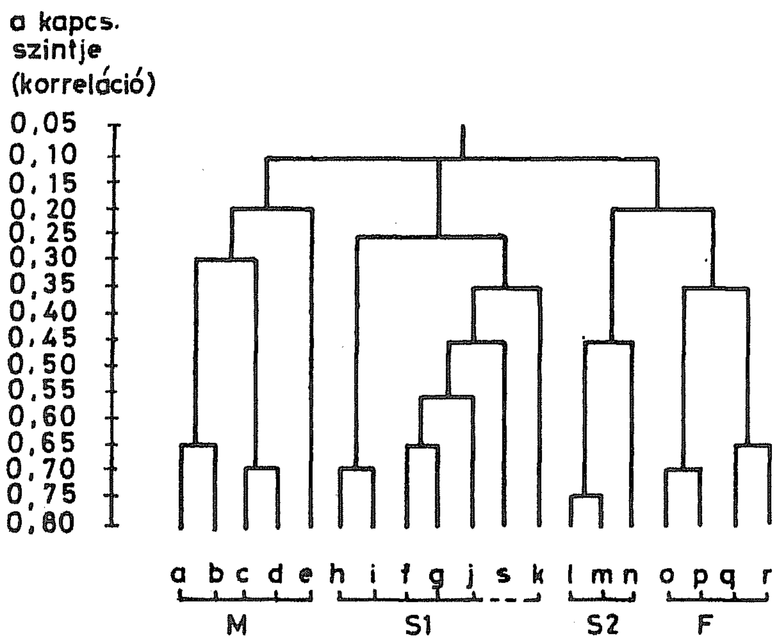
Az (I) és a (IV) struktúrájú feladatok mindegyik szinten kapcsolódnak (a—d, f—i, e—r), majd együttesen alkotnak egy nagyobb csoportot. Ugyancsak páronként összekapcsolódnak a (II) és (III) struktúrával rendelkező feladatok is (b—c, g—h, p—q), de ezek már nem alkotnak elkülönülő, közös osztályt. A relatív gyakoriságokkal kapcsolatban megfigyelt tendencia tehát akkor is érvényes, ha a feladatokat jellemző minden adatot figyelembe veszünk. A csoportképző tulajdonság pedig valószínűleg az, hogy az (I) és a (IV) struktúrájú feladatokban egyaránt kéttagú, a (II) és (III) struktúrájú feladatokban pedig háromtagú kombinációkat kell képezni, és úgy látszik, ez utóbbi a nehezebb. A kapcsolatok hierarchizálódásának elve ezeknél a feladatoknál megegyezik azzal az elvvel, amelyik szerint a 4. ábra felépül, a konkrét kapcsolatok képződése azonban nem felel meg az ottaninak. A gráf által kifejezett többi kapcsolat nehezen értelmezhető, többféle hatás eredőjének tulajdonítható.

Egészen másfajta megközelítést jelent a korrelációs együtthatók elemzése. A 3. táblázatban bemutatott korrelációs mátrix áttekintése során két megfigyelést érdemes kiemelni:

1. az azonos struktúra-típusba tartozó feladatok közötti korrelációk (a négyzetbe foglalt értékek) csak kismértékben emelkednek ki a táblázat többi értéke közül;

2. az azonos szint feladatai között viszont többnyire magas a korreláció, mindössze három esetben marad 0,30 alatt (l. a háromszög formában keretbe foglalt értékeket).

A mefigyelt tendenciák explicitté tétele érdekében a korrelációs mátrix felhasználásával ugyancsak elvégeztük a cluster-analízist (complete linkage). Az eredményt a 10. ábrán szemléltetjük.



10. ábra

A feladatok osztályokká szerveződése lényegében a 3. ábrán vázolt gráfnak felel meg, és az ott megfogalmazott hipotézist valószínűsíti. Tehát a *manipulatív, a szenzoros és a formális feladatok szorosan összetartozó osztályokat alkotnak, és ezeken belül rendeződnek a matematikai struktúrák közötti kapcsolatoknak megfelelően.* Ez a megállapítás azonban csak az alaptendenciát jelzi, a dendrogram ugyanis nem fedi pontosan a 3. ábrán felvázolt hipotetikus struktúrát. Vegyük ezért sorra az egyezéseket és az eltéréseket.

A manipulatív feladatok kapcsolódása tökéletesen megfelel a 3. (illetve az 1.) ábrán vázolt hipotézisnek: összefügg az ismétlés nélküli kombinációk 'a—b' feladatpárja, az ismétléses kombinációk 'c—d' feladatpárja, majd ez a két feladatpár egyesül egy nagyobb osztályba, ezekhez csatlakozik az 'e' feladat, amely ismétléses permutációk képzése.

Szenzoros szinten ugyancsak megtaláljuk az 'f—g' és a 'h—i' párokat. Eltérés a manipulatív szinttől (és az 1. ábra struktúrájától), hogy itt a 'j' és 'k' feladat szorosabban kapcsolódik az 'f—g' feladathoz, és csak ezek együtt a 'h—i' párhoz. A magyarázat azonban kézenfekvő, mind az ismétléses permutációk (j) mind a particiók (k) képzését az ismétlés nélküli kombinációk (f—g) képzésével hoztuk kapcsolatba. Az 's' feladat ismétléses permutációk képzése formális szinten, a csoportba sorolódására nincs egyértelmű magyarázat. Az S2 szint (l—m—n) belső összekapcsolódása ugyancsak megfelel a 3. ábrán vázolt hipotézisnek, azonban a feladatcsoport nem a többi szenzoros feladathoz kapcsolódik, hanem a formális feladatokhoz. Ennek magyarázata lehet az, hogy az 'l—m—n' feladatokban két halmaz között kellett leképezést létesíteni, és az már eléri az elvontságnak azt a fokát, ami a formális feladatokra jellemző. A formális szint feladatainak kapcsolódása — a hiányzó 's' feladat kivételével — megfelel a hipotézisnek. A korrelációs együtthatók alapján végzett cluster-analízis eredménye tehát mindössze két ponton (az 's' feladat helye és az 'l—m—n' feladatcsoport helye) tér el az elméleti elemzés alapján kapott és a tartalom dominanciáját kifejező hierarchikus rendtől.

Összegzés

A feladatok megoldása során nyújtott teljesítmények abszolút értékének meghatározásában a feladat struktúrájának domináns szerepe van. Azonos struktúra mellett a teljesítmények a tartalom megváltoztatása során is közel állandónak bizonyulnak, esetleg a tartalom absztraktabbá válásával kismértékben csökkennek. A feladatstruktúra megváltoztatása viszont a teljesítmények jelentős változásához vezethet. Az irodalomban található megállapításokkal megegyezően azt kaptuk, hogy *a teljesítmények a feladatok struktúrájának izomorfiája mellett is jelentősen különbözhetnek.* A korrelációs együtthatók alapján végzett cluster-analízis szerint elsődlegesen az azonos tartalmú feladatok képeznek közös csoportot. E csoporton belül viszont jó közelítéssel azt a kapcsolatrendszert kapjuk, amit a struktúrák között az elméleti elemzés során kimutattunk. Mind az azonos struktúrájú, de különböző tartalmú feladatok teljesítményeinek megegyezése, mind pedig az azonos tartalmú, de különböző struktúrájú feladatok közötti belső kapcsolatrendszernek az elméletileg várt kapcsolatrendszerrel való megegyezése alkalmas támpontot adhat a validitás mérlegeléséhez.

Ezek az eredmények megerősítik a kombinatív képesség vizsgálatának egyik kiinduló feltételezését, miszerint léteznek a tartalomtól viszonylag független műveleti struktúrák, a kombinatív műveletek. Hozzájárulnak továbbá eredményeink érvényességi körének, általánosíthatóságának mérlegeléséhez. Amint azt az előző elemzések során láttuk, egy adott struktúra (ill. a megfelelő művelet) kialakulása, viszonylagos fejlettsége nem jelenti egyben a hasonló (akár izomorf) struktúra meglétét, működését. Nem általánosíthatjuk tehát eredményeinket más, a vizsgálatban nem szereplő struktúrákra. Hasonló okokból a műveletrendszer elemzésére teljességgel alkalmatlan a normatív tesztelés metodikája (véletlen mintavétel a feladatok köréből), csak a struktúrák teljes körének számbavétele révén várhatunk eredményt.

Ugyanakkor a feladatrendszerben reprezentált struktúrákkal kapcsolatos eredményeinket a tartalmak széles körére általánosíthatjuk.

További elemzéseket igényel a teljesítmény-mutatók szerinti külső és a korrelációs együtthatók alapján kapott belső összefüggésrendszer viszonyának a tisztázása. Ugyancsak további vizsgálatokkal lehet eldönteni azt is, hogy eredményeink mennyire általánosíthatók más területekről vett feladatokra.

A közlemény a szerkesztőségbe érkezett: 1983. IV. 13.

IRODALOM

1. Csapó B. (1979): A kombinatív képesség és értékelésének feltételei. Acta Univ. Szeg. de A. J. nom. Sectio Paed. et Psych. Series Specifica Paedagogica, Szeged
2. Csapó B. (1983): A kombinatív képesség és műveleteinek vizsgálata 14 éves tanulóknál. Magyar Pedagógia 1. sz. 31—50. o.
3. Dienes Z. P.—Jeeves, M. A. (1970): The Effects of Structural Relations on Transfer. Hutchison Educational, London
4. Hayes, J. R.—Simon, H. A. (1970): Psychological differences among problem isomorphs. in: Castellan, N. J.—Pisoni, D. B.—Potts, G. R. (eds): Cognitive Theory 2. 27—42. o. Hillsdale, H. Erlbaum
5. Inhelder, B.—Piaget, J. (1967): A gyermek logikájától az ifjú logikájáig. Akadémiai Kiadó, Budapest
6. Klein S.—Hábermann M. G.—Jeeves, M. A. (1983): Matematikai struktúrák fejlődési sajátosságai. Pszichológia, 1. sz.
7. Lord, F. M.—Novick, M. R. (1968): Statistical Theories of Mental Test Scores. Addison — Wesley Publishing Company, London, etc.
8. Nagy J. (1980): A tudás létezési módjai, megjelenési formái és funkciói. Acta Univ. Szeg. de A. J. nom. Sectio Paedagogica et Psychologica 22. 81—149. Szeged
9. Piaget, J. (1970): Válogatott tanulmányok. Gondolat Kiadó, Budapest
10. Simon, H. A.—Hayes, J. R. (1976): The understanding process: Problem isomorph. Cognitive Psychology 8. 1976, 165—190. o.
11. Simon, H. A. (1979): Information Processing Models of Cognition American Review of Psychology, 30, 363—396. o. (Magyarul in: Simon, H.: Korlátozott racionalitás. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1982)

ИССЛЕДОВАНИЕ РОЛИ СТРУКТУРЫ И СОДЕРЖАНИЯ В ЗАДАЧАХ ИЗОМОРФНОЙ КОМБИНАТОРИКИ

БЕНЁ ЧАПО

В статье освещается часть исследовательской программы, посвященной изучению системы комбинативных операций и процессов их развития. Анализируя результаты решения изоморфных задач, автор пробует найти ответ на вопрос, какова роль структуры задачи и какова роль конкретного содержания, определяющие ее решение. В используемых 19 задачах шесть имеют различную, но изоморфную друг с другом структуру. Как показал анализ, в определении абсолютных значений результатов структура задач играет доминирующую роль. При аналогичной структуре, в ходе изменения содержания, результаты оказались практически постоянными. Однако, изменение структуры задачи может приводить к значительным изменениям в результатах, а последние, наряду с изоморфией структуры задач, также значительно различаются. Кластерный анализ, выполненный с помощью коэффициентов корреляции, зачислил в одну группу задачи одинакового содержания. Однако, внутри этой группы была выявлена система связи, которая была показана между структурами с помощью теоретического анализа.

EXAMINATION OF THE ROLE OF THE STRUCTURE AND CONTENT IN ISOMORPHIC COMBINATORICAL TASKS

CSAPÓ, BENŐ

The study is a part of a project investigating the system and the developmental process of combinative operations. Analyzing only the results of isomorphic tasks from the collected data the author tries to find out what role the structure and the concrete content of a task plays in determining the achievements. The 19 tasks used create 6 different structures which are isomorphic at the same time. The structure of a task plays a dominant role in determining the absolute value of the achievement. If the contents are changed while the structure remains unaltered the achievement does not change either, although making the contents a little more abstract results in slightly poorer achievements. Changing the structure of the task may lead to a significant change in the achievement, the results considerably differ from each-other even when tasks are isomorphic. Cluster-analysis carried out on the basis of correlational coefficients rendered the tasks with similar content into a joint group. The relationship-system revealed within these groups were approximatly the same as formerly shown by the theoretical analysis.